Утверждение 2. *Если матрицы 2-го порядка* $V_1, V_2, \ldots, V_5$ *образуют группу монодромии и* $\rho_5 \neq \sigma_5$, *то решение проблемы Римана удовлетворяет системе* (1) *с дифференциальными матрицами вида* (2), *где*

$$s_k = \frac{1}{\rho_5 - \sigma_5}[\rho_5(\sigma_5 + \rho_k + \sigma_k) + \rho_k\sigma_k - \tau_k^*], \quad \gamma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$t_1 = \frac{1}{2\gamma_1}(\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_{34} \pm \sqrt{(\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_{34})^2 - 4\gamma_1\gamma_{34}}),$$

$$t_2 = \frac{1}{2\gamma_{12}}(\gamma_3 - \gamma_4 - \gamma_{12} \pm \sqrt{(\gamma_3 - \gamma_4 - \gamma_{12})^2 - 4\gamma_4\gamma_{12}}),$$

$$\gamma_{12} = -(s_{12} + \rho_{12})(s_{12} + \sigma_{12}), \quad \gamma_{34} = -(s_{34} - \rho_{34})(s_{34} - \sigma_{34}),$$

$$s_{12} = \frac{1}{\rho_5 - \sigma_5}[\rho_{12}\sigma_{12} - (\rho_5 + \rho_{34})(\rho_5 + \sigma_{34})], \quad s_{34} = \frac{1}{\rho_5 - \sigma_5}[\rho_{34}\sigma_{34} - (\rho_5 + \rho_{12})(\rho_5 + \sigma_{12})],$$

$c_1 = c$, $c_2 = -(1 + t_1)c$, $c_3 = (1 + t_2)t_1 c$, $c_4 = -t_1 t_2 c$, c — *произвольная постоянная.*

Литература

1. Еругин Н. П. *Проблема Римана.* Мн.: Наука и техника, 1982.
2. Хвощинская Л. А., Жоровина Т. Н. *Уравнение связи интегральных подстановок проблемы Римана.* // Тез. докл. 8-го международного семинара AMADE–2015, 14–19 сентября 2015 г. Минск, 2015. С 84.
3. Хвощинская Л. А. *Нахождение акцессорных параметров при решении некоторых краевых задач.* // Тр. Ин-та матемаитки НАН Беларуси. 2001. С. 150–160.

ОБ ОБОБЩЕННОМ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ПОДОБИИ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

П.А. Худякова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
khudziakova@tut.by

Через $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначим алгебру вещественных $n \times n$-матриц со стандартной топологией (т. е. топологией, порожденной какой-либо матричной нормой). Класс всех кусочно-непрерывных матричнозначных функций $A(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначим через через $\mathcal{M}_n^*$. Далее матричнозначные функции $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*$ называем просто матрицами. Подкласс класса $\mathcal{M}_n^*$, состоящий из ограниченных функций, обозначается через $\mathcal{M}_n$ (ограниченность матричнозначной функции $A(\cdot)$ означает, что $\sup\limits_{t \geqslant 0} \|A(t)\| < +\infty$), а подкласс класса $\mathcal{M}_n$, состоящий из непрерывных функций — через $C\mathcal{M}_n$.

Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с матрицей $A(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*$ и сделаем в этой системе линейную замену переменных $x = L(t)y$ с невырожденной при всех $t \geqslant 0$ и кусочно-дифференцируемой на $[0, +\infty)$ матрицей $L(\cdot)$. Тогда придем к линейной однородной дифференциальной системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

с матрицей $B(\cdot)$, задаваемой равенством

$$B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t) \tag{3}$$

(равенство (3) понимается выполненным всюду на $[0, +\infty)$, кроме тех значений t, в которых производная $\dot{L}(t)$ не существует). Кусочно-непрерывные матричнозначные функции $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (3), называются кинематически подобными относительно матрицы $L(\cdot)$, а система (1) приводимой к системе (2) преобразованием $x = L(t)y$. Очевидно, что любые две матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ кинематически подобны относительно некоторой матрицы $L(\cdot)$: например, матрицы $L(\cdot) = X(\cdot)Y^{-1}(\cdot)$, где $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ — какие-либо фундаментальные матрицы систем (1) и (2) соответственно. Поэтому понятия кинематического подобия и приводимости бессодержательны, если не ограничить класс матриц $L(\cdot)$ преобразований.

В теории устойчивости и в теории показателей Ляпунова рассматриваются, в основном, следующие два класса невырожденных линейных кусочно-дифференцируемых преобразований систем (1):

1) класс $\mathcal{L}_n$ преобразований Ляпунова [1, с. 42], матрицы $L(\cdot)$ которого удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{t\geqslant 0}\|L(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t\geqslant 0}\|L^{-1}(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t\geqslant 0}\|\dot{L}(t)\| < +\infty$$

(в последнем неравенстве supremum берется по всем тем $t \geqslant 0$, в которых производная $\dot{L}(t)$ определена);

2) класс $\mathcal{B}_n^0$ обобщенных преобразований Ляпунова, для матриц $L(\cdot)$ которого выполнены ([2–4], см. также [5, с. 88, 92]) соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|L(t)\| = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|L^{-1}(t)\| = 0.$$

Очевидно собственное включение: $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{B}_n^0$. Если матрица $L(\cdot) \in \mathcal{L}_n$, то преобразование $x = L(t)y$ называется преобразованием Ляпунова, а матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (3), — кинематически подобными. Если же матрица $L(\cdot) \in \mathcal{B}_n^0$, то преобразование $x = L(t)y$ называется обобщенным преобразованием Ляпунова, а матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, связанные соотношением (3), — обобщенно кинематически подобными. Кинематическое подобие матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ обозначим как $A(\cdot) \overset{c}{\sim} B(\cdot)$, а их обобщенно кинематическое подобие — как $A(\cdot) \overset{gc}{\sim} B(\cdot)$.

Если $L(\cdot)$ — тождественно постоянная матрица, то равенство (3) приводит к обычному подобию матриц, которое в этом случае, как для того, чтобы подчеркнуть, что матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ являются, вообще говоря, переменными, так и для того, чтобы иметь сходное с кинематическим подобием название, называют также [6, с. 93] статическим подобием. Очевидно, что статически подобные матрицы остаются статически подобными после умножения их на один и тот же скаляр. Для отношения кинематического подобия это, если $n \geqslant 2$, вообще говоря, не так: в [7] построен пример таких кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ из $\mathcal{M}_2$, что, например, матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными.

В работе [7] для пары матриц $\big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ введено множество $c(A, B)$, названное множеством кинематического подобия матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ и состоящее из тех $\mu \in \mathbb{R}$, для которых $\mu A(\cdot) \overset{c}{\sim} \mu B(\cdot)$, и доказано, что класс $\{c(A, B) : A(\cdot), B(\cdot) \in \mathcal{M}_n\}$ множеств совпадает с классом F_σ-множеств числовой прямой, содержащих нуль. Хотя определение множеств $c(A, B)$ ограничено в [7] только классом $\mathcal{M}_n$ матриц, но очевидно, что это определение без изменений переносится и на класс $\mathcal{M}_n^*$, и более того, при таком расширенном понимании этого определения для класса множеств $\{c(A, B) : A(\cdot), B(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*\}$ справедлив тот же результат, в чем несложно убедиться, проверив, что доказательство необходимости этого результата в [7] не использует ограниченности матриц.

В силу сказанного, следуя [7], назовем множеством $gc(A,B)$ обобщенного кинематического подобия матриц $A(\cdot)$, $B(\cdot) \in \mathcal{M}_n^*$ множество, состоящее из тех $\mu \in \mathbb{R}$, для которых $\mu A(\cdot) \overset{gc}{\sim} \mu B(\cdot)$. То, что для кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ в общем случае справедливо неравенство $gc(A,B) \neq \mathbb{R}$, вытекает из упомянутого выше примера из [7]: его матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не только не являются кинематически подобными, но и не являются обобщенно кинематически подобными. Очевидно включение, $c(A,B) \subset gc(A,B)$. Является ли это включение в общем случае собственным? Ответ на этот вопрос положителен — его содержит следующая

Теорема. *Для любого $n \geqslant 2$ в классе $C\mathcal{M}_n$ существуют такие кинематически подобные матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, что матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными, но являются обобщенно кинематически подобными.*

Литература

1. Ляпунов А. М. *Собр. соч.* В 6-ти т. Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 476 с.

2. Басов В. П. *О структуре решения правильной системы* // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., физ. и хим. 1952. № 12. С. 3–8.

3. Гробман Д. М. *Характеристические показатели систем, близких к линейным* // Мат. сб. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166.

4. Богданов Ю. С. *К теории систем линейных дифференциальных уравнений* // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 6. С. 813–814.

5. Адрианова Л. Я. *Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений.* СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1992. 240 с.

6. Чезари Л. *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Мир, 1964. 478 с.

7. Барабанов Е. А. *Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 42–63.